

EVALUACIÓN DE DOS MODELOS PREDICTIVOS DE LA TASA DE CAMBIO  
EURO DÓLAR ENTRE LOS AÑOS 2.000 Y 2.014 APLICANDO CRITERIO DE  
RENTABILIDAD SIMULADA

CARLOS AUGUSTO VELÁSQUEZ NARANJO

**FUNDACIÓN UNIVERSITARIA LOS LIBERTADORES**  
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS  
POSTGRADO EN ESTADÍSTICA APLICADA  
BOGOTÁ D.C.  
2.018

EVALUACIÓN DE DOS MODELOS PREDICTIVOS DE LA TASA DE CAMBIO  
EURO DÓLAR ENTRE LOS AÑOS 2.000 Y 2.014 APLICANDO CRITERIO DE  
RENTABILIDAD SIMULADA

CARLOS AUGUSTO VELÁSQUEZ NARANJO

Trabajo de grado para optar al título de especialista en estadística aplicada

Director,  
Diego Fernando Lemus Polania  
M.sc. en Estadística

**FUNDACIÓN UNIVERSITARIA LOS LIBERTADORES**  
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS  
POSTGRADO EN ESTADÍSTICA APLICADA  
BOGOTÁ D.C.  
2.018

Nota de aceptación

---

---

---

---

---

---

---

Firma del Presidente del Jurado

---

Firma del Jurado

---

Firma del Jurado

Bogotá D.C., 17 del mes de septiembre de 2.018

Las directivas de la Fundación Universitaria Los  
Libertadores, los jurados calificadores y el cuerpo  
docente no son responsables por los criterios e  
ideas expuestas en el presente documento.  
Estos corresponden únicamente al autor.

## RESUMEN

Se contrasta la hipótesis de que las series de tiempo aplicadas en la simulación del comportamiento de un trading sobre la paridad Euro – Dólar generan un mayor valor presente neto que la simulación de un trading basado en el modelo de la Paridad del Poder Adquisitivo (PPA); obteniéndose la confirmación de la hipótesis como conclusión, después de la contrastación.

Palabras clave: Modelo ARIMA, Modelo ARIMAX, Paridad del Poder Adquisitivo.

## ABSTRACT

It hypothesize that the time series applied in the simulation of the behavior of a trading on the Euro - Dollar parity generate a higher net present value than the simulation of a trading based on the Purchasing Power Parity (PPP) ; Obtaining confirmation of the hypothesis, as a conclusion after the test.

Keywords: ARIMA Model, ARIMAX Model, Purchasing Power Parity.

## Tabla de contenido

	pág.
1. INTRODUCCIÓN	10
2. MARCO DE REFERENCIA	12
2.1. La paridad del poder adquisitivo	12
2.2. Modelos ARIMA y ARIMAX	14
2.3. Metodología Box Jenkins para identificación de procesos ARIMA o ARIMAX	16
2.4. Valor presente neto bajo incertidumbre	17
2.5. Pruebas de raíz unitaria	18
2.5.1. Prueba de Dickey Fuller (DF)	18
2.5.2. Prueba de Dickey Fuller aumentada (DFA)	19
2.5.3. Prueba de raíz unitaria Phillips –Perron (PP)	20
2.5.4. Prueba de Zivot – Andrews	20
3. MARCO METODOLÓGICO	22
3.1. Tipo de estudio	22
3.2. Población y muestra	22
3.3. Instrumentos y materiales	22
3.4. Procedimiento y diseño estadístico	23
4. RESULTADOS	24
4.1. Descripción de las series	24
4.2. Modelo de la paridad de poder adquisitivo	25
4.3. Modelo de series de tiempo	26
4.3.1. Identificación del modelo	28
4.3.2. Obtención de los flujos de caja del modelo ARIMAX	33
4.4. Valor presente neto	33
5. DISCUSIÓN	36
6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	37
7. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	38
8. ANEXOS	40

## LISTA DE TABLAS.

	pág.
Tabla 1. Variables de estudio	23
Tabla 2. Resultados de las pruebas de raíz unitaria	27
Tabla 3. Resultados adicionales de la prueba Zivot y Andrews	28
Tabla 4. Resultados del modelo ARIMA(p,d,q) con intervención Ajustado	28
Tabla 5. Intervalos de confianza al 95% para los parámetros del Modelo	29
Tabla 6. Resultados de las pruebas de normalidad	29
Tabla 7. Pruebas de incorrelación	30

## LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Ejemplos de series de tiempo que se pueden modelar mediante ARIMAX	16
Figura 2. Evolución de la paridad Euro Dólar, enero de 2.000 - marzo de 2.014	24
Figura 3. Evolución de la inflación zona Euro, enero de 2.000 – marzo de 2.014	24
Figura 4. Evolución de la inflación USA, enero de 2.000 - marzo de 2.014	25
Figura 5. Autocorrelaciones de la serie Euro-Dólar	26
Figura 6. Prueba de estabilidad estructural CUSUM	27
Figura 7. Prueba de estabilidad estructural CUSUM modelo identificado	30
Figura 8. Residuales estandarizados	31
Figura 9. ACF y PACF de los residuos estandarizados al cuadrado	31
Figura 10. Tasa de cambio Euro Dólar y valores ajustados	33
Figura 11. Flujos de caja obtenidos por la aplicación del modelo PPA para el periodo t	34
Figura 12. Flujos de caja obtenidos por la aplicación del modelo ARIMA(0,1,1) + intervención ARIMA(1,1,0)+atípicos para el periodo t	34
Figura 13. Autocorrelograma parcial de los flujos de caja obtenidos mediante la aplicación del modelo de paridad de poder adquisitivo	35
Figura 14. Autocorrelograma parcial de los flujos de caja obtenidos mediante la aplicación del modelo ARIMA(0,1,1) + intervención ARIMA(1,1,0)+atípicos para el periodo t	35



## LISTA DE ECUACIONES

	pág.
Ecuación 1. Modelo PPA	12
Ecuación 2. Modelo PPA en su adaptación relativa	13
Ecuación 3. Modelo ARIMA	14
Ecuación 4. Modelo ARIMAX	15
Ecuación 5. Función de intervención	15
Ecuación 6. Función pulso	15
Ecuación 7. Función intervención modelo AR(1)	15
Ecuación 8. Valor Presente Neto	17
Ecuación 9. Valor esperado VPN flujos excluyentes.	18
Ecuación 10. Varianza esperada VPN flujos excluyentes	18
Ecuación 9. Valor esperado VPN flujos relacionados.	14
Ecuación 10. Desviación estándar VPN flujos relacionados.	15
Ecuación 11. ARIMA(0,1,1) + intervención ARIMA(1,1,0) +atípicos	32

## 1. INTRODUCCIÓN.

Al momento de escribir este trabajo diariamente se transan en el mundo unos cinco billones de dólares estadounidenses<sup>1</sup> en divisas a través del FOREX (Foreign Exchange). Dentro del universo de agentes que transan en este enorme mercado hay un grupo que corresponde a inversores particulares que terminan perdiendo en un 90% de los casos el capital invertido<sup>2</sup>. Si añadimos a estos datos el hecho de que los brokers (empresas dedicadas a crear mercado) buscan clientes de manera bastante prolija tenemos que hay un ambiente propicio para que muchas personas se vean atraídas a invertir sus ahorros en el FOREX y terminen comprometiendo parte de sus finanzas.

En vista de los anteriores datos, se detecta la necesidad de evaluar métodos para intentar predecir el precio de una divisa y que puedan servir para que un inversor particular logre mejorar las oportunidades de obtener retornos sobre la inversión. En ese sentido el tema de investigación del presente trabajo es comparar dos enfoques de análisis aplicados al precio del Euro en términos de dólares norteamericanos nominales, para lo cual se plantea la pregunta: ¿Cuál de dos metodologías: el análisis de series de tiempo o el análisis de la paridad de poder adquisitivo (por sus siglas: PPA) es la que mejor se ajusta al comportamiento de la tasa de cambio Euro – Dólar durante el periodo investigado?.

El análisis de series de tiempo puede usarse para simular el comportamiento de una cartera de divisas, en particular los modelos ARIMA permiten, a partir de una muestra, identificar la estructura probabilística que subyace en la población sin preocuparse por la interdependencia con otras variables (Pérez, 2008); de otra parte la teoría de la paridad del poder adquisitivo (PPA) relaciona la variable tasa de cambio con la variable inflación, cimentada en la teoría económica (Dornbusch y Fischer, 1994).

Se tiene como objetivo determinar cuál de los dos enfoques esbozados obtiene los mejores retornos, suponiendo que se utilizan para la operativa de compra y venta de divisas. El contraste se hace comparando los retornos obtenidos por cada modelo.

Nótese que no es objetivo del presente trabajo contrastar la teoría de la Paridad de Poder Adquisitivo (PPA), ni evaluar la validez de los modelos ARIMA para lograr predicciones fiables. El objetivo se enmarca en determinar si aplicando los métodos elegidos, un operador de divisas puede llegar a obtener retornos sobre

---

<sup>1</sup> INTERNET: Forex Market Size: A trader Advantage. <http://finance.yahoo.com>

<sup>2</sup> INTERNET: [http://www.amf-france.org/Actualites/Communiqués-de-presse/AMF/annee\\_2014.html?docId=workspace%3A%2F%2FSpacesStore%2F96c52a14-3900-464f-8fff-7d4700ff37e3](http://www.amf-france.org/Actualites/Communiqués-de-presse/AMF/annee_2014.html?docId=workspace%3A%2F%2FSpacesStore%2F96c52a14-3900-464f-8fff-7d4700ff37e3).

L'Autorité des marchés financiers se mobilise contre les dangers du Forex pour les particuliers. Publié le 13 octobre 2014.

una inversión y cuál podría mejorar sus posibilidades de éxito, lo cual implica que se hará una aplicación práctica de las dos herramientas, PPA y modelos ARIMA, desde el punto de vista meramente utilitario sin llegar a conclusiones relativas a la efectividad de cada una de ellas y sin buscar apoyar o rechazarlas como mecanismo de predicción.

## 2. MARCO DE REFERENCIA.

En este apartado se tratan tres temas principales: 1). Se presenta un acercamiento a la teoría de la paridad del poder adquisitivo y al modelo para describir las relaciones entre las variables tasa de cambio e inflación; 2). Se esboza una introducción a los modelos ARIMA y ARIMAX para el tratamiento de series de tiempo y el método de Box-Jenkins para identificar y ajustar modelos en procesos no estacionarios homogéneos y 3). Se hace una reseña al concepto de valor presente neto bajo condiciones de incertidumbre.

### 2.1. La paridad del poder adquisitivo.

Según Dornbusch y Fischer(1994) la teoría de la paridad del poder adquisitivo sostiene que “las variaciones de los tipos de cambio reflejan principalmente las diferencias entre las tasas de inflación de los distintos países”.

La teoría fue desarrollada por Gustav Cassel (1916) y se basa en la llamada ley de precio único, que implica tener un precio para la misma mercancía independiente del país donde se comercie porque el arbitraje de precios equilibra la oferta y demanda global.

En la práctica la paridad del poder adquisitivo significa que a largo plazo la tasa de cambio real retorna a su nivel medio, con lo cual si la tasa de cambio real actual es superior a la media de largo plazo entonces la tasa de cambio real debe bajar (Dornbusch y Fischer, 1994).

El modelo general de la Paridad de Poder Adquisitivo (PPA) es de la forma:

$$R\left(\frac{e}{u}\right) = \frac{pf * t}{p}$$

Ecuación 1. Modelo PPA.  
Fuente: Dornbusch y otros.

donde  $R\left(\frac{e}{u}\right)$  es la tasa de cambio real (euro/dólar),  $pf$  es el nivel de precios en la economía local,  $t$  es la tasa de cambio nominal y  $p$  el nivel de precios en el extranjero.

El modelo PPA ha tenido diversas adaptaciones para tratar de superar dificultades como las diferencias de métodos para medir el nivel de precios en cada país; una de estas modificaciones es la llamada adaptación relativa que será utilizada para los propósitos del presente trabajo. La adaptación relativa de la teoría de la Paridad de Poder Adquisitivo (PPA) fue planteada por Krugman y Obstfeld (2006) y se basa en las tasas de inflación de las economías comparadas. El modelo es el siguiente:

$$T\left(\frac{e}{u}\right) = G_{(e)} - G_{(u)}$$

Ecuación 2. Modelo PPA en su adaptación relativa.

Donde para los propósitos del presente trabajo tenemos que,

$T\left(\frac{e}{u}\right) = \frac{\text{Tasa de cambio}\left(\frac{e}{u}\right) \text{ en periodo } t}{\text{Tasa de cambio}\left(\frac{e}{u}\right) \text{ en periodo } t-1} - 1$ , es la variación de la tasa de cambio (en nuestro caso euro/dólar),  $G_{(e)}$  es la tasa de inflación en la eurozona y  $G_{(u)}$  es la tasa de inflación en los Estados Unidos.

Se espera que este enfoque describa el comportamiento de la tasa de cambio real cuando se trata de economías abiertas.

Respecto de la capacidad de la teoría de la paridad de poder adquisitivo para predecir el comportamiento de la tasa de cambio, se han hecho estudios para contrastarla comparando diversas economías, con resultados mixtos, ya que algunos corroboran la teoría y otros resultados la rechazan. Se citan algunos estudios: Holmes (2002) quien no encuentra evidencia firme de que se cumpla para treinta países, Anoruo et al. (2002) analiza once países concluyendo que la PPA se verifica para la muestra, Darby (1983) encuentra que no se cumple, Huizinga (1987) tampoco encuentra evidencia a favor de la PPA, Frenkel (1986) encuentra soporte empírico para las paridades de Estados Unidos y Gran Bretaña a largo plazo, Taylor (1988) rechaza la PPA, así mismo Mark(1990); Kim (1990) encuentra confirmación de la PPA a largo plazo al igual que Cheung y Lai (1993), Kanas (2006) corrobora la PPA para la mayoría de los 16 países analizado pero la rechaza para algunos.

Sobre las razones de la diversidad de resultados se citan entre otras las siguientes: 1) los bienes nacionales y extranjeros no son sustitutos perfectos, en muchos casos ni siquiera cercanos; 2) existencia de barreras tarifarias y no tarifarias, 3) costos de transacción, 4) la ausencia de mercados competitivos, 5) variaciones en los componentes no transables de los bienes en los diferentes países, 6) diversas metodologías en el testeo de la teoría, como por ejemplo los períodos de tiempo empleados para el análisis, la técnica econométrica empleada, el índice de precios empleado, las canastas de bienes utilizadas por cada país para el cálculo del índice de precios pueden variar en la ponderación del mismo bien, etc...

A pesar de los resultados en contra, la PPA sigue siendo una herramienta utilizada en el análisis económico y de hecho está presente en modelos que determinan acciones de política económica como por ejemplo los planteados por la nueva economía internacional surgidos en los años 90, según Obstfeld y Kenneth (1995).

## 2.2. Modelos ARIMA y ARIMAX.

Los modelos ARIMA (autorregresivo, integrado, de media móvil) fueron desarrollados por Box y Jenkins (1976) y según Pérez (2008) están destinados a identificar, estimar y diagnosticar modelos dinámicos de series de tiempo, con la particularidad de que permiten desprenderse de la necesidad de tener un modelo preestablecido ya que la estructura probabilística involucrada se infiere de los datos.

Sin pérdida de generalidad los modelos ARIMA(p,d,q) pueden tener la siguiente forma funcional:

$$\Phi(L)(1-L)^d Y_t = \Theta(L)a_t$$

Ecuación 3. Modelo ARIMA. Fuente: Pérez Ramírez, Fredy.

donde  $Y_t$  es el valor tomado por la serie temporal de interés (en este caso tasa de cambio) en el tiempo  $t$ ,  $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$  es el polinomio autorregresivo de orden  $p$  y  $\Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q$  es el polinomio de medias móviles de orden  $q$  siendo  $\phi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) los coeficientes autorregresivos y  $\theta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ) los coeficientes de medias móviles.

Las raíces de los polinomios deben estar por fuera del círculo unitario y no pueden ser iguales con el fin de garantizar que la parte ARMA(p,q) del proceso sea estacionaria e invertible.  $L$  es el operador de rezagos y  $\epsilon_t$  es el error en el tiempo  $t$  (innovación),  $(1-L)^d$  es el operador de diferencias y  $d$  es el número de raíces unitarias que tiene el proceso y que son necesarias para transformar la serie en estacionaria.

De acuerdo a la forma de la serie se pueden generar varios modelos generales, por ejemplo:

Si  $p = d = 0$ , se trata de un modelo ARIMA(0,0,q) o un modelo de medias móviles de orden  $q$  MA(q); si  $q = d = 0$ , se trata de un modelo ARIMA(p,0,0) o un modelo autorregresivo de orden  $p$  AR(p). Si  $p = q = 0$  hay un modelo ARIMA(0,d,0) o I(d), es decir, un proceso no estacionario homogéneo con  $d$  raíces unitarias y si  $d=0$  tenemos un modelo ARIMA(p,0,q) o ARMA(p,q), es decir, un proceso estacionario.

Según CRYER y CHAN (2008) una extensión del modelo ARIMA es el ARIMAX, que básicamente es un ARIMA que incorpora al modelo aquellas intervenciones que un modelo ARIMA no alcanza a modelar de manera satisfactoria.

Según Cryer y Chan (2008) y Brockwell y Davis (2002), el modelo ARIMAX más intuitivo tiene la siguiente forma funcional:

$$Z_t = Y_t + m_t$$

donde  $m_t$  es el cambio en la función o el efecto intervención y  $Y_t$  es el proceso ARIMA antes de la intervención. La serie de tiempo  $Z_t$  se divide así en dos subconjuntos: uno referido a los datos previos a la intervención y el otro que abarca los datos después y durante la intervención. La intervención puede implicar un cambio temporal o uno permanente en la función.

Cryer y Chan (2008) ilustran algunos ejemplos comunes de intervención que se pueden incorporar a los modelos ARIMA: En la figura 1 se muestran 6 ejemplos de series de tiempo que se pueden modelar mediante ARIMAX, las gráficas de la izquierda muestran intervenciones permanentes a partir de la observación 6 y las de la derecha muestran intervenciones temporales que se van desvaneciendo después de cierto número de periodos, hasta retornar al comportamiento de la serie antes de la intervención.

Cada intervención se modela de manera diferente según sea permanente o temporal. Se puede modelar la intervención como una función de la forma:

$$S_t^T = \begin{cases} 1, si t \geq T \\ 0, en otro caso \end{cases},$$

Ecuación 5. Función de intervención.

Fuente: CRYER D., Jonathan and CHAN, Kung-Sik.

O, como una función pulso:

$$P_t^T = \begin{cases} 1, si t = T \\ 0, en otro caso \end{cases},$$

Ecuación 6. Función pulso.

Fuente: CRYER D., Jonathan and CHAN, Kung-Sik.

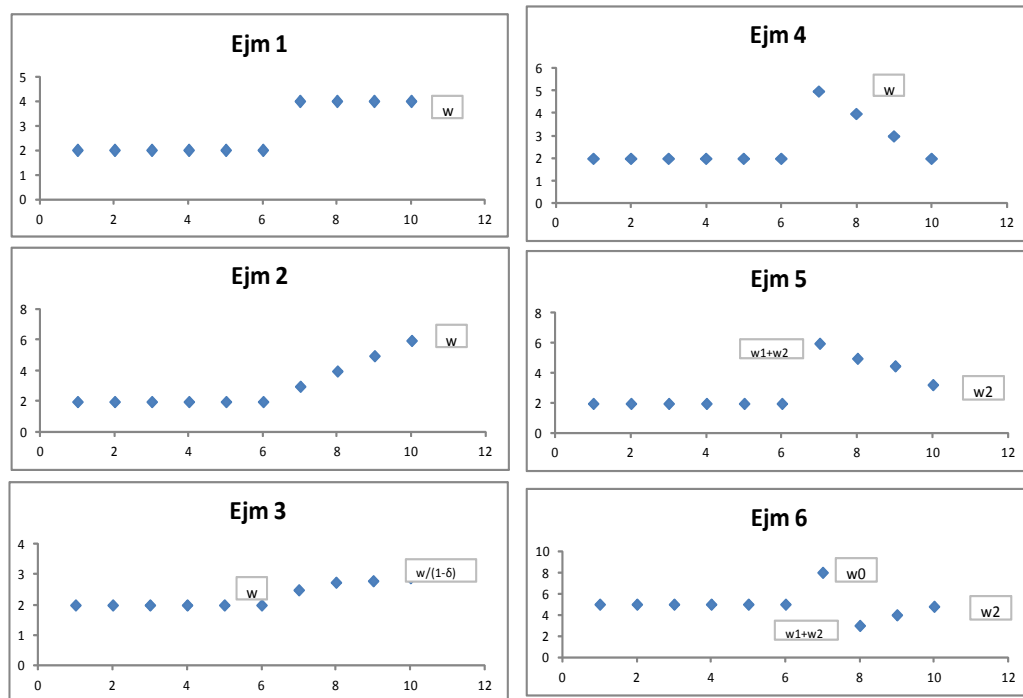
$P_t^T$  es el indicador o variable dummy que señala el momento de la intervención. En caso de que la intervención sea permanente  $m_t = \omega S_t^T$ , donde  $\omega$  es el valor desconocido del cambio permanente en la media durante la intervención.

En la práctica se puede modelar  $m_t$  como un AR(1) con el término de error reemplazando un rezago de  $S_t^T$ :

$$m_t = \begin{cases} \omega \frac{1-\delta^{t-T}}{1-\delta}, si t \geq T \\ 0, en otro caso \end{cases} \quad \text{Donde, } 1 > \delta > 0.$$

Ecuación 7. Función intervención modelo AR(1). Fuente: CRYER D., Jonathan and CHAN, Kung-Sik.

Figura 1. Ejemplos de series de tiempo que se pueden modelar mediante ARIMAX.



Fuente: CRYER D., Jonathan and CHAN, Kung-Sik.

### 2.3 Metodología Box Jenkins para identificación de procesos ARIMA o ARIMAX.

En la literatura relacionada existen algunos enfoques tradicionales para la identificación de procesos no estacionarios homogéneos. La metodología desarrollada extensamente por Box y Jenkins (1976) y explicada por Brockwell y Davis (2002) consiste en aplicar el operador de diferencia entera sobre la serie original, de forma repetida, hasta que las observaciones diferenciadas se parezcan a la realización de alguna de las series de tiempo estacionarias. Sobre la serie adecuadamente diferenciada se puede emplear la teoría de procesos estacionarios con el fin de identificar y analizar la secuencia de observaciones empleando el modelo de corto plazo más adecuado. Una vez identificado el modelo se puede realizar pronósticos del proceso original. El método puede ser explicado formalmente por medio de cuatro etapas:

1. Mediante un análisis exploratorio de la serie de tiempo original, se identifica un conjunto de posibles modelos dentro de la clase de modelos ARIMA. Inicialmente se realizan pruebas de raíz unitaria con el fin de determinar el número de veces que debe aplicarse el operador diferencia para cancelar la no estacionariedad homogénea. Sobre la serie diferenciada se identifica el



orden posible del polinomio autorregresivo AR(p) y del polinomio de medias móviles MA(q).

2. Efectuar la estimación de los parámetros asociados a los modelos de corto plazo identificados empleando métodos de estimación no lineal. Esta etapa presupone que ya está identificado un modelo teniendo que encontrar los mejores valores de los parámetros para que dicho modelo represente apropiadamente a la serie de tiempo.
3. Realizar un proceso de validación de los supuestos básicos implícitos en el modelo y verificar que el modelo proporciona un ajuste adecuado. En el caso donde no se cumplan las condiciones anteriores se determinan las modificaciones necesarias y se repiten las etapas anteriores hasta que la verificación indique los resultados aceptables.
4. Emplear el modelo identificado en el paso anterior para los fines que el investigador haya tenido en mente al construir; dichos fines son por lo general de pronóstico, control, simulación o explicación del fenómeno en estudio.

#### 2.4. Valor presente neto bajo incertidumbre.

La manera usada en el presente trabajo para evaluar cada modelo atendiendo al criterio de rentabilidad, es calculando el valor presente neto cuando hay condiciones de incertidumbre, explicada de manera bastante práctica por Infante (1987).

En términos generales se define el valor presente neto como:

$$VPN_{(i)} = \sum \left( \frac{1}{(1+i)^j} \right) (F_j)$$

Ecuación 8. Valor Presente Neto.  
Fuente: Infante Villareal, Arturo.

donde  $i$  es la tasa de interés libre de riesgo, llamada también costo de oportunidad,  $F_j$  es el flujo obtenido por el proyecto de inversión en un periodo  $j$  (periodo considerado de inversión).

Cuando los retornos dependen de variables aleatorias se puede realizar el cálculo del VPN aplicando las siguientes ecuaciones:

$$E(VPN_{(i)}) = \sum E(F_j) \left( \frac{1}{(1+i)^j} \right) =$$

Ecuación 9. Valor esperado VPN flujos excluyentes.  
Fuente: Infante Villareal, Arturo.

Donde  $E(VPN_{(i)})$  es el valor esperado del valor presente neto para la tasa de interés libre de riesgo  $i$ ,  $E(F_j)$  es el valor esperado del flujo de caja en el tiempo  $j$ ,  $i$  es la tasa de interés.

$$\sigma^2(VPN_{(i)}) = \sum \sigma^2(F_j) \left( \frac{1}{(1+i)^j} \right)^2$$

Ecuación 10. Varianza esperada VPN flujos excluyentes.  
Fuente: Infante Villareal, Arturo.

Donde  $\sigma^2(VPN_{(i)})$  es la varianza del valor presente neto,  $\sigma^2(F_j)$  es la varianza de cada flujo de caja,  $j$  es el periodo evaluado e  $i$  es la tasa de descuento.

Si los flujos de caja están correlacionados la diferencia se dará a nivel de la desviación estándar ya que los hechos o circunstancias que afectan el flujo de caja de un periodo también afectarán los demás, con lo cual la desviación estándar tenderá a ser de un orden de magnitud diferente a cuando los flujos no están correlacionados. No obstante la fórmula para el cálculo del VPN será idéntica en ambos casos, de acuerdo al teorema de Lindelberg, según lo expuesto por Infante (1987).

## 2.5 Pruebas de raíz unitaria

En el presente trabajo se contemplan las pruebas de raíz unitaria de Dickey Fuller (DF), Dickey Fuller Aumentada (DFA), Phillips-Perron (PP) y de Zivot y Andrews (ZA).

### 2.5.1. Prueba de Dickey Fuller (DF).

La prueba DF busca encontrar estacionariedad en una serie de tiempo  $Y_t$  con base en el estadístico  $\tau$  (Tau) construido según la hipótesis nula de existencia de una raíz unitaria y por tanto de no estacionariedad; de otra parte la hipótesis alterna considera la estacionariedad de la serie, según lo expuesto por Gujarati y Porter (2010).

La prueba implica tres modelos en los cuales la serie de tiempo puede comportarse acorde con la presencia de deriva, tendencia determinística y estocástica.

$Y_t$  es una caminata aleatoria

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + a_t$$

$Y_t$  es una caminata aleatoria con deriva

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \delta Y_{t-1} + a_t$$

$Y_t$  es una caminata aleatoria con deriva,  
alrededor de una tendencia determinista

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + a_t$$

El estadístico de prueba es  $\tau = \hat{\delta} / \text{se}(\hat{\delta})$  donde  $\hat{\delta}$  es el estimador de mínimos cuadrados de  $\delta$  y  $\text{se}(\hat{\delta})$  es el error estándar en las ecuaciones presentadas previamente donde  $a_t$  es un ruido blanco Gaussiano de media cero y varianza constante  $-\text{RBG}(0, \sigma_a^2) -$ .

El contraste de hipótesis de la prueba es el siguiente

- $H_0: \delta = 0$ . La serie de tiempo posee una raíz unitaria y es no Estacionaria homogénea.
- $H_a: \delta < 0$ . La serie de tiempo no posee raíz unitaria y el proceso es estacionario.

La distribución de  $\tau$  bajo  $H_0$  no es la  $t$  – Student tradicional, pertenece a una clase de distribuciones no estándar. Si  $\tau(\alpha, n)$  es el percentil  $\alpha$ -inferior de dicha distribución se debe rechazar  $H_0$  si el valor observado de  $\tau$  es  $\tau < \tau(\alpha, n)$  (Castaño, 2011).

Debido a que los modelos de la prueba DF no consideran la posible autocorrelación de las variables  $a_t$ , la eficiencia de los estimadores puede ser sesgada obteniendo un modelo inadecuado. Por lo tanto, Dickey-Fuller desarrollaron una extensión de prueba considerando el término de error como un modelo ARMA.

### 2.5.2. Prueba de Dickey Fuller Aumentada (DFA).

Gujarati y Porter (2010) explican la DFA, en la que se considera la correlación de los términos de error al aumentar la sumatoria de valores rezagados del proceso  $Y_t$  en las ecuaciones de la prueba DF.

$Y_t$  es una caminata aleatoria

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta Y_{t-i} + a_t$$

$Y_t$  es una caminata aleatoria con deriva

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \delta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta Y_{t-i} + a_t$$

$Y_t$  es una caminata aleatoria con deriva,  
alrededor de una tendencia determinista

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta Y_{t-i} + a_t$$

Donde  $a_t$  es un ruido blanco Gaussiano de media cero y varianza constante

$-\text{RBG}(0, \sigma_a^2) -$  y  $\Delta Y_{t-1} = Y_{t-1} - Y_{t-2}$ ,  $\Delta Y_{t-2} = Y_{t-2} - Y_{t-3}, \dots$  según el número de rezagos, logrando que el  $a_t$  no este serialmente relacionado y se obtenga una estimación insesgada de  $\delta$ . Los estadísticos y criterios de rechazo en la prueba DFA son los mismos que se aplican en la prueba DF.

### 2.5.3 Prueba de Raiz Unitaria Phillips-Perron (PP)

La prueba PP parte de la prueba DF, en la cual se permite que los  $a_t$  no sean estrictamente ruido blanco. La prueba implica una estimación del espectro  $a_t$  (estimación de las autocorrelaciones del error). La prueba PP utiliza la DF, donde  $a_t$  puede estar autocorrelacionada. En la prueba el estadístico no es un error estándar, es decir, el error estándar se ajusta por el efecto de la autocorrelacion (Montenegro, 2010).

Finalmente, la prueba PP está bajo las mismas hipótesis de la prueba DF así como su estimador y los criterios de rechazo.

### 2.5.4 Prueba de Zivot-Andrews

La prueba de Zivot y Andrews surge como respuesta a la poca confianza de las pruebas DF, DFA y PP porque no detectan los posibles cambios estructurales de una serie; la prueba consiste en encontrar raíces unitarias independientes de un cambio estructural o una ruptura, éstas pueden ser en tendencia, intercepto o en ambos casos. De acuerdo a Rangel (2007) la prueba de Zivot y Andrews implica tres modelos.

Modelo 1: se incluye en las variables explicatorias una tendencia determinística lineal, la variable endógena se rezaga un periodo, hay una variable indicadora para el cambio estructural y  $j$  términos rezagados de las primeras diferencias de la variable endógena,

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \delta Y_{t-1} + \theta DU_t + \sum_{j=1}^k c_j \Delta Y_{t-j} + a_t$$

donde la variable  $DU_t$  es dicotómica y captura el cambio estructural en el intercepto y  $T_B$  es el periodo en que sucede la ruptura, quedando definida así:

$$DU_t: \begin{cases} 1 & t > T_B \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Modelo 2: modela un cambio estructural en tendencia contemplando una variable indicadora mostrando una nueva tendencia después de la ruptura,

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \delta Y_{t-1} + \lambda DT_t + \sum_{j=1}^k c_j Y_{t-j} + a_t$$

La variable que capta la ruptura estructural en tendencia es  $DB_t$ , definida como  $DT_t: \begin{cases} 1 & t > T_B \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ , donde  $T_B$  es el periodo en que sucede la ruptura.

Modelo 3: contempla el cambio en intercepto y tendencia empleando las variables indicadoras definidas en los modelos 1 y 2 :

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \theta DU_t + \lambda DT_t + \delta Y_{t-1} + \sum_{j=1}^k c_j \Delta Y_{t-j} + a_t$$

Se estiman las anteriores ecuaciones por mínimos cuadrados ordinarios de manera secuencial para los valores de  $T_B = 2, \dots, T-1$  y  $T$  es el número de observaciones.

El contraste de hipótesis es:  $H_0: \delta = 0$ . La serie de tiempo posee una raíz unitaria y es no estacionaria homogénea.  $H_1: \delta < 0$ . La serie de tiempo no posee raíz unitaria y el proceso es estacionario.

El estadístico de prueba es  $\tau = \hat{\delta} / \text{se}(\hat{\delta})$  donde  $\hat{\delta}$  es el estimador de mínimos cuadrados de  $\delta$  y  $\text{se}(\hat{\delta})$  es el error estándar del estimador  $\hat{\delta}$ .  $a_t$  es un ruido blanco Gaussiano de media cero y varianza constante  $-\text{RBG}(0, \sigma_a^2) -$ . La distribución de  $\tau$  bajo  $H_0$  no es la  $t$  – Student tradicional, pertenece a una clase de distribuciones no estándar. Si  $\tau(\alpha, n)$  es el percentil  $\alpha$ -inferior de dicha distribución se debe rechazar  $H_0$  si el valor observado de  $\tau$  es  $\tau < \tau(\alpha, n)$  (Castaño, 2011).

### 3. MARCO METODOLÓGICO.

#### 3.1. Tipo de estudio.

El tipo de estudio abordado en el presente trabajo es descriptivo.

#### 3.2. Población y muestra.

Las unidades de análisis son tres: las tasas de cambio Euro – Dólar corte mensual, las tasas de inflación mensuales en USA y las tasas de inflación mensuales en la Eurozona. El tiempo a estudiar es de 14 años, comprendidos entre el año 2.000 y el 2.014.

El proceso de recolección de información tiene las siguientes fuentes: una base de datos de cotizaciones de divisas (Euro/Dólar corte enero de 2000 a marzo de 2014) de libre acceso, obtenido de un operador de mercado reconocido a nivel mundial cuya razón social es FXCM LTD con sede en Londres y Nueva York, cuya página de internet es [www.FXCM.COM](http://www.FXCM.COM); una base de datos obtenida del sitio de internet <http://download.bls.gov/pub/time.series/cu/> administrado por la oficina de estadísticas laborales con la información de la tasa de inflación mensual en Estados Unidos corte enero de 2000 a marzo de 2014; y por último una base de datos con la inflación mensual corte enero de 2000 a marzo de 2014, extraída del sitio de internet <http://sdw.ecb.europa.eu/>, administrado por el Banco Central Europeo.

#### 3.3. Instrumentos y materiales.

Las bases de datos que se emplean tienen los siguientes campos:

- Tasa de cambio Euro – Dólar: Fecha y hora de la cotización, precio de apertura, precio alto, precio bajo, precio de cierre. El precio de apertura se refiere al precio vigente al inicio de cada mes, el precio alto es la mayor cotización del Euro durante el mes, el precio bajo es su menor cotización durante el mes y el precio de cierre se refiere al precio con el cual cerró la divisa en el mes.
- Tasa de inflación en Estados Unidos: mes de observación de la tasa, valor de la tasa de inflación en el mes.
- Tasa de inflación en la Eurozona: mes de observación de la tasa, valor de la tasa de inflación en el mes.

Se usan los programas Excel y R para los contrastes de hipótesis, obtención de parámetros y la generación de los modelos.

### 3.4. Procedimiento y diseño estadístico.

El tiempo dedicado a la recolección de datos fue de un mes. Se siguieron los siguientes pasos en el estudio comparativo: 1. Planteamiento de los modelos de manera operativa, 2. Obtención de los flujos de caja mensuales al aplicar el modelo basado en la paridad de poder adquisitivo, 3. Obtención de los flujos de caja mensuales al aplicar el modelo de series de tiempo, 4. Cálculo del valor presente neto obtenido por la aplicación de cada modelo.

Para el presente trabajo se usaron técnicas de análisis de series de tiempo, análisis de auto-correlación de los flujos de caja para determinar método de valor presente neto e inferencia estadística para comparar parámetros obtenidos en cada modelo.

Así mismo se contrastó la hipótesis de que el valor presente neto del modelo basado en la paridad de poder adquisitivo es mayor que el basado en series de tiempo. Cada modelo permitió describir la operativa de compra – venta de la paridad euro/dólar según las decisiones que un inversionista teórico hubiese podido tomar basado en las predicciones de precio obtenidos por el modelo.

Cada decisión de compra o venta obtuvo un flujo de caja al corte de cada mes evaluado. Los flujos de caja sirvieron para evaluar el modelo con el mayor valor presente neto. En la tabla 1 se describen brevemente las variables de estudio,

Tabla 1. Variables de estudio.

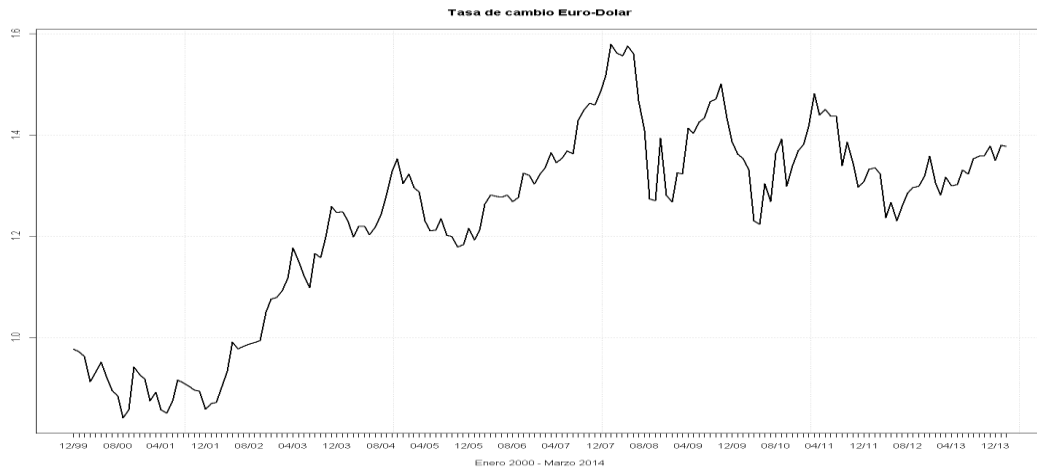
NOMBRE DE LA VARIABLE	DEFINICIÓN CONCEPTUAL	DEFINICIÓN OPERACIONAL
Flujo de caja mensual.	Ganancias o pérdidas en la operación de compra venta de la divisa.	$((\text{Precio de compra o venta en el periodo } t) - (\text{precio de venta o compra en tiempo } t+1)) * (\text{Unidades de la paridad adquiridas en una operación}).$ Se toman precios de cierre mensual.
Tasa de cambio nominal mensual Euro Dólar	Valor de la divisa Euro en términos de dólares	Precio del Euro en términos de Dólares USA con corte último día de cada mes, es decir, precio de cierre.
Tasa de inflación mensual en Estados Unidos de América	Índice de precios que refleja la tasa de variación de los mismos en el mes en USA	Valor de la tasa de inflación en USA con corte mensual.
Tasa de inflación mensual en la Zona Euro	Índice de precios en la Eurozona.	Valor de la tasa de inflación en Eurozona con corte mensual.

## 4. RESULTADOS.

### 4.1. Descripción de las series.

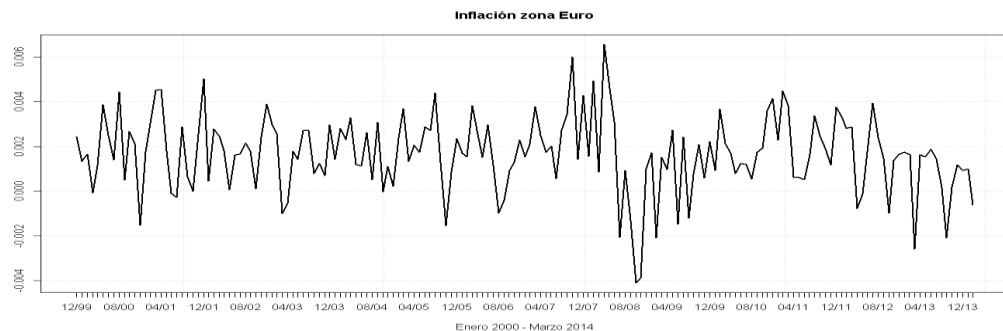
En la figura 2 se observa el comportamiento en el tiempo del valor del Euro en términos de dólares de Estados Unidos, se observa que desde enero de 2.003 el Euro pasó a cotizarse por encima de un dólar hasta que en enero de 2004 se rompió la marca de 1.2 Dólares por Euro, para, a partir de ese momento, permanecer por encima de este valor base y moviéndose dentro de un corredor que oscila entre 1.2 y 1.5 Dólares por Euro. A primera vista se puede decir que esta serie no es estacionaria ya que su media no es constante en el tiempo.

Figura 2. Evolución de la paridad Euro Dólar, enero de 2000 - marzo de 2014.



La figura 3 presenta el comportamiento en el tiempo de la inflación mensual en la Zona Euro, se evidencia una oscilación de la inflación mensual entre junio y diciembre de 2.008 cuando pasó del 0.6% mensual al -0.4% experimentando la Eurozona un proceso deflacionario en casi un semestre para luego retornar a un nivel del 0.4% en el segundo semestre del 2.010.

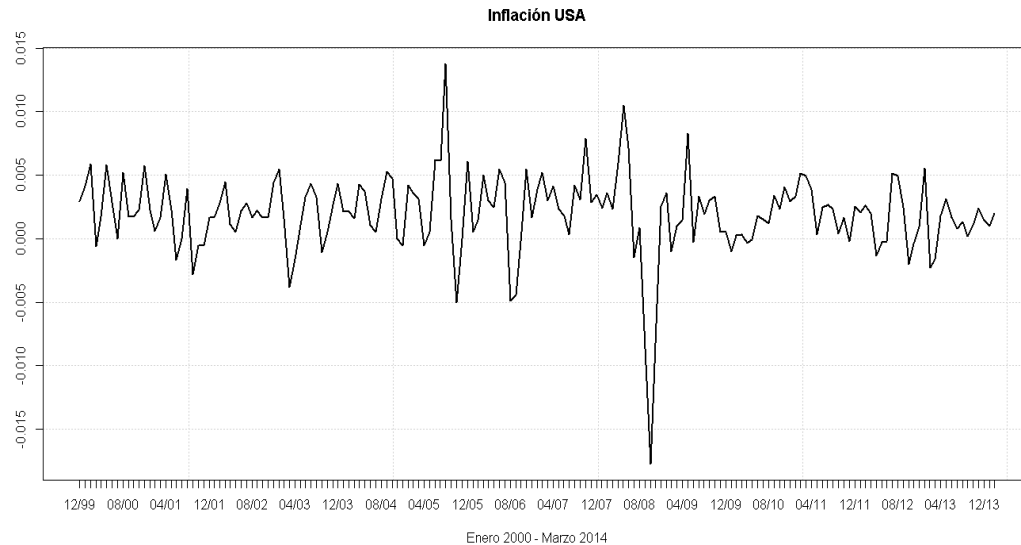
Figura 3. Evolución de la inflación zona Euro: enero de 2000 - marzo de 2014.





La figura 4 muestra el comportamiento en el tiempo de la inflación mensual en U.S.A. En junio de 2008 la inflación mensual rondaba el 1% y en noviembre del mismo año llegó a -1.77%, retornando a un nivel del 1% en el segundo semestre del 2010.

Figura 4. Evolución de la inflación USA: enero de 2000 - marzo de 2014.



#### 4.2. Modelo de la paridad de poder adquisitivo.

En el marco de referencia se mostró que el modelo general que explica el cambio de una cotización de una divisa en términos de las tasas de inflación se expresa mediante la ecuación:

$$T\left(\frac{e}{u}\right) = G_{(e)} - G_{(u)}$$

Ecuación 2. Modelo PPA en su adaptación relativa.

Fuente: Krugman y Obstfeld

Donde  $T\left(\frac{e}{u}\right) = \left( \frac{\text{Tasa de cambio}\left(\frac{e}{u}\right) \text{ en periodo } t}{\text{Tasa de cambio}\left(\frac{e}{u}\right) \text{ en periodo } t-1} - 1 \right)$ , es la variación de la tasa de cambio (euro/dólar),  $G_{(e)}$  es la tasa de inflación en la eurozona y  $G_{(\$)}$  es la tasa de inflación en USA.

La metodología empleada para aplicar el modelo se describe a continuación:

Inicialmente, se tomaron las diferencias de las tasas de inflación entre Estados Unidos y la zona Euro de cada mes. Posteriormente se calculó la tasa de cambio esperada restando a la inflación de la zona Euro la tasa de inflación de Estados Unidos, sumando a este resultado 1 y multiplicando por el valor de la tasa de

cambio del periodo t-1. Este cálculo es resultado de despejar el término tasa de cambio  $T\left(\frac{e}{u}\right)$  en el periodo t, de la ecuación:

$$\left( \frac{Tasa\ de\ cambio\ \left(\frac{e}{u}\right)\ en\ periodo\ t}{Tasa\ de\ cambio\ \left(\frac{e}{u}\right)\ en\ periodo\ t-1} - 1 \right) = G_{(e)} - G_{(u)}$$

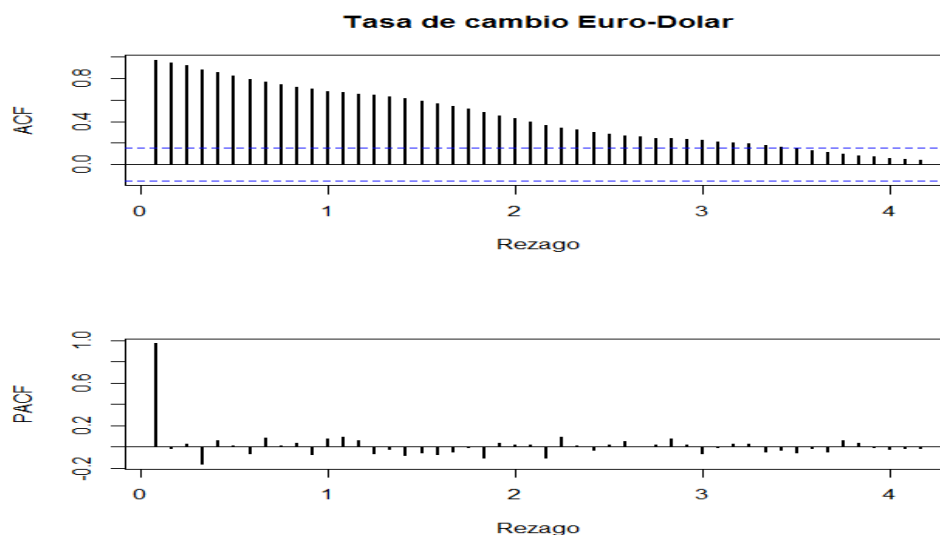
La decisión de “comprar” o “vender” obedeció al siguiente criterio: si el valor de la tasa de cambio en el periodo t-1 es menor al valor de tasa de cambio esperado en t, entonces el inversionista teórico procedió a “comprar” Euros, de lo contrario los “vendió”.

Finalmente, se calculan los resultados de las operativas de “compra” o “venta” para dos periodos, t y t+1. En caso de que se haya cumplido el pronóstico hay utilidades para el inversionista ya que al liquidar cada posición el resultado será un valor positivo en el balance, caso contrario el balance se verá afectado por pérdidas. La ganancia o pérdida se obtiene teniendo en cuenta el precio de cierre mensual.

#### 4.3. Modelo de series de tiempo.

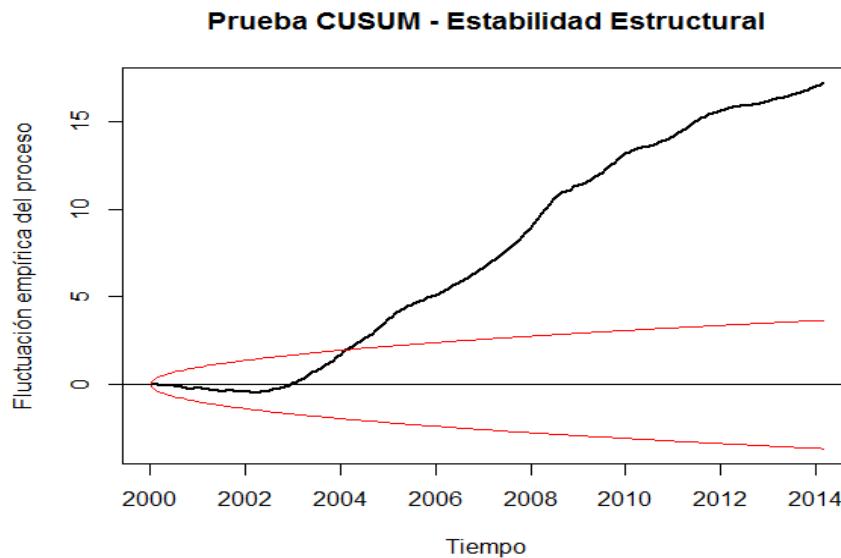
En la figura 5 se aprecian la función de autocorrelación y de autocorrelación parcial de la serie Euro-Dólar. La función de autocorrelación sugiere que la serie no es estacionaria, así mismo la función de autocorrelación parcial parece indicar la posibilidad de una raíz unitaria en el proceso, es decir, al parecer la serie temporal es no estacionaria homogénea.

Figura 5. Autocorrelaciones de la serie Euro-Dólar.



La prueba CUSUM o de estabilidad estructural muestra que la fluctuación empírica del proceso no es estable, lo cual sigue indicando que la serie no es estacionaria.

Figura 6. Prueba de estabilidad estructural CUSUM.



La prueba aumentada de Dickey – Fuller no rechaza la hipótesis nula de existencia de raíz unitaria y tendencia determinística en la serie euro – dólar para el periodo evaluado; así mismo la prueba Phillips – Perron detecta tanto la presencia de una raíz unitaria como tendencia determinística. Al aplicar la prueba Zivot – Andrews se detecta que el proceso tiene una intervención en julio de 2008 (observación 103) adicional a una raíz unitaria.

Tabla 2. Resultados de las pruebas de raíz unitaria.

Prueba	Estadístico de prueba	Valores críticos		
		$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$
ADF	-1.58	-3.46	-2.88	-2.57
PP	-1.46	-3.47	-2.88	-2.58
ZA (punto de quiebre: 103)	-4.57	-5.57	-5.08	-4.82

Al observar los demás resultados de la prueba de Zivot y Andrews que son presentados en la Tabla 3, se puede concluir que la serie tiene un impacto negativo estadísticamente significativo ( $\alpha = 0.05$ ) tanto en la media global ( $du$ ) como en la tendencia de la serie ( $dt$ ). Este impacto hace que la media global disminuya y cambie la tendencia creciente del proceso disminuyendo su nivel.

Tabla 3. Resultados adicionales de la prueba de Zivot y Andrews

	Estimador	Desv. Est	Estadístico de prueba	Valor p
Intercepto	0.14	0.03	4.254	$3.51 \times 10^{-5}$
y.l1	0.82	0.04	20.348	$< 2 \times 10^{-16}$
Tendencia	$1.25 \times 10^{-3}$	$2.84 \times 10^{-4}$	4.416	$1.81 \times 10^{-5}$
du	-0.04	0.01	-3.386	$8.88 \times 10^{-4}$
dt	$-1.15 \times 10^{-3}$	$3.96 \times 10^{-4}$	-2.903	$4.20 \times 10^{-3}$

#### 4.3.1. Identificación del modelo.

En el proceso de identificación del modelo, se determinó que los datos observados en la serie temporal de la tasa Euro-Dolar ( $Z_t$ ) son el resultado de un proceso estocástico que sigue un modelo ARIMA(p,d,q) ( $Y_t$ ) y un componente exógeno que recoge los efectos anómalos de forma determinista ( $m_t$ ), tal como se presentó en la ecuación 4.

Empleando la metodología propuesta por Castaño (2007) se detectaron cuatro observaciones atípicas de tipo aditivo y un punto de quiebre en la observación 103, finalmente se identificó que el mejor modelo ARIMA(p,d,q) con intervención está dado por:

$$Z_t = Y_t + m_t$$

donde  $Y_t$  sigue un modelo IMA(1,1) dado por

$$(1 - L)Y_t = (1 - \theta L)a_t$$

con  $a_t \sim RBG(0, \sigma^2)$ . El componente exógeno dado por

$$m_t = \frac{w_0}{1 - \delta L} P_{103}^T + w_1 P_{108}^T + w_2 P_{125}^T + w_3 P_{131}^T + w_4 P_{141}^T$$

Los resultados del modelo ajustado se resumen en la Tabla 4.

Tabla 4. Resultados del modelo ARIMA(p,d,q) con intervención ajustado

Parámetro	Estimador	Desv. Est	Estadístico de prueba	Valor p
$\theta$	0.1724	0.0732	2.36	0.02
$w_0$	-0.1315	0.0321	-4.10	$4.13 \times 10^{-5}$
$\delta$	0.8868	0.1134	7.82	$5.28 \times 10^{-15}$
$w_1$	0.1177	0.0223	5.25	$1.52 \times 10^{-7}$
$w_2$	-0.0743	0.0227	-3.27	$1.07 \times 10^{-3}$
$w_3$	-0.0671	0.0224	-2.99	$2.78 \times 10^{-3}$
$w_4$	-0.0730	0.0224	-3.25	$1.15 \times 10^{-3}$

Los intervalos de confianza al 95% para los parámetros del modelo se presentan en la Tabla 5.

Tabla 5. Intervalos de confianza al 95% para los parámetros del modelo

Parámetro	Límite inferior	Límite superior
$\theta$	0.0289	0.3158
$w_0$	-0.1944	-0.0686
$\delta$	0.6645	1.1092
$w_1$	0.0739	0.1616
$w_2$	-0.1188	-0.0298
$w_3$	-0.1110	-0.0232
$w_4$	-0.1170	-0.0291

Una vez realizado el ajuste del modelo se procede a validar lo supuestos del modelo. Lo anterior se sustenta en la implementación de las siguientes pruebas:

- Pruebas de Normalidad de los residuos (ver Anexo 1 con las pruebas de normalidad),
- Prueba de estabilidad estructural de los residuos,
- Pruebas de incorrelación de los residuos
- Pruebas de heterocedasticidad condicional.

En la Tabla 6 se presentan los resultados de las diferentes pruebas de normalidad (Ho: Los residuos siguen una distribución normal vs Ha: Los residuos no siguen una distribución normal) consideradas en el estudio:

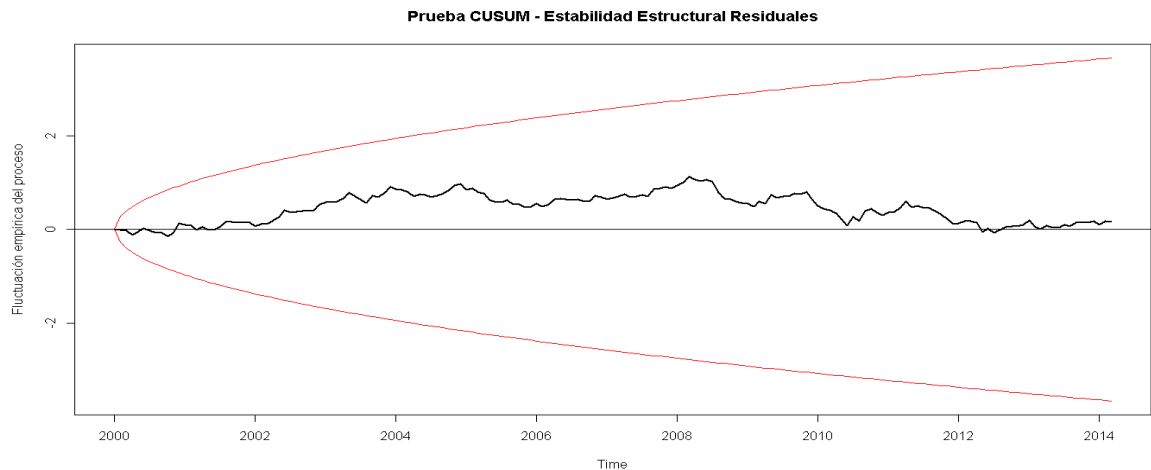
Tabla 6. Resultados de las pruebas de normalidad

Prueba		Estadístico de prueba	Valor p
Shapiro-Wilk		0.9929	0.5697
Kolmogorov-Smirnov		0.0529	0.7251
Jarque – Bera		1.4292	0.4894
D'Agostino	General	1.7877	0.4091
	Sesgo	0.5597	0.5757
	Curtosis	1.2143	0.2246

Al observar los resultados presentados en la Tabla 6 se puede concluir que no existe suficiente evidencia muestral para rechazar la hipótesis nula de normalidad, razón por la cual el supuesto de normalidad se mantiene para los residuales del modelo ajustado.

En la Figura 7. se presenta el gráfico CUSUM con el fin de analizar la estabilidad estructural en los residuos. En esta figura se puede observar que los residuos recursivos reportados por el modelo se mantienen dentro de la región de no rechazo delimitada por la parábola, con lo cual se puede considerar que hay estabilidad estructural en los residuos de modelo.

Figura 7. Prueba de estabilidad estructural CUSUM modelo identificado.



En la Tabla 7 se presentan los resultados de las diferentes pruebas de incorrelación ( $H_0$ : Los residuos no presentan correlación serial vs  $H_a$ : Los residuos presentan correlación serial) consideradas en el estudio:

Tabla 7. Pruebas de incorrelación.

Prueba		Estadístico de prueba	Valor p
Durbin-Watson		2.001	0.5026
Ljung-Box	1 grado de libertad	$6.95 \times 10^{-5}$	0.9933
	5 grado de libertad	1.418	0.9223
	10 grado de libertad	5.070	0.8864
	15 grado de libertad	10.899	0.7597
	20 grado de libertad	22.468	0.3157

Al observar los resultados presentados en la Tabla 7 se puede concluir que no existe suficiente evidencia muestral para rechazar la hipótesis nula de que los residuos no presentan correlación serial razón por la cual este supuesto se mantiene. En la Figura 8 se presenta el gráfico de los residuos estandarizados, en el cual se puede apreciar que fluctúan entre  $-3$  y  $3$  sin presentar algún patrón que ponga en contradicho el supuesto de varianza constante de los residuales.

Figura 8. Residuales estandarizados.

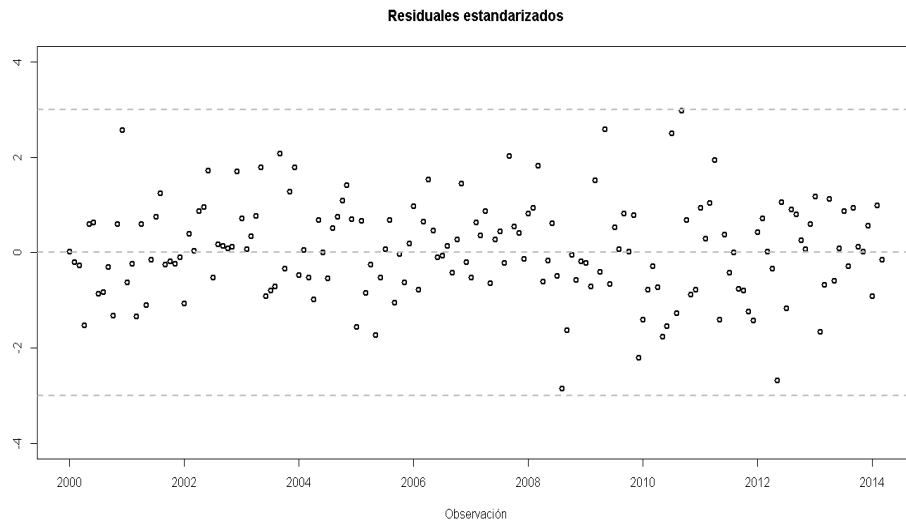
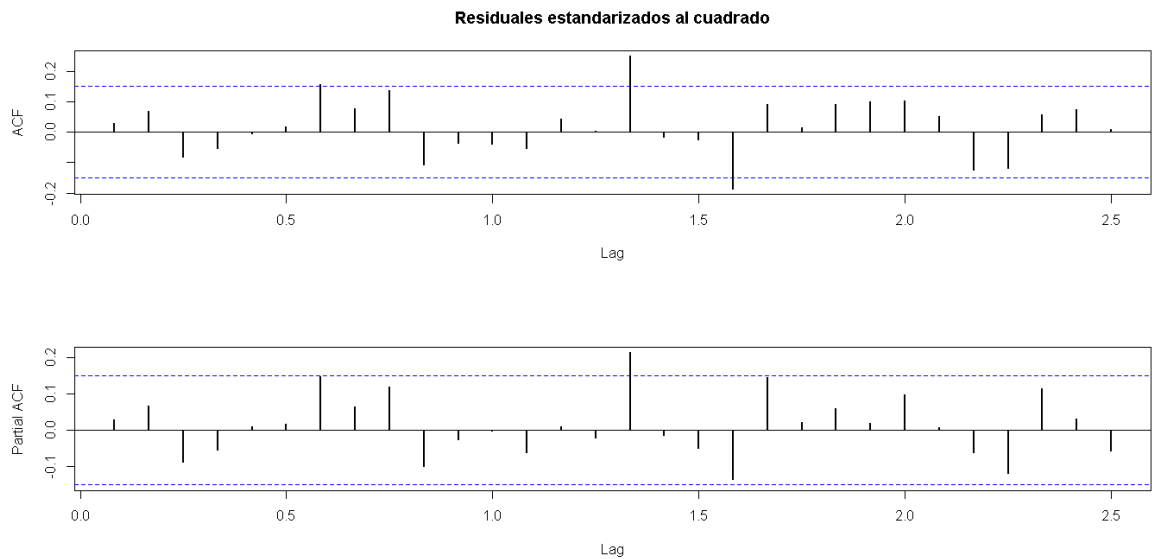


Figura 9. ACF y PACF de los residuos estandarizados al cuadrado.



La prueba McLeod and Li no detecta efecto ARCH en la serie. La prueba rechaza la hipótesis nula de existencia de un efecto ARCH por lo tanto no se modela este efecto (ver anexo 1).

Una vez validada la bondad del ajuste del modelo, se aplicó a los datos de la serie para obtener los flujos de caja sobre los cuales se realiza el cálculo del valor presente neto.

El modelo en su forma algebraica después de desarrollar la expresión ARIMA(0,1,1) + intervención ARIMA(1,1,0) + atípico (diciembre de 2008) + atípico (mayo de 2010) + atípico (noviembre de 2010) + atípico (septiembre de 2011) es el siguiente:

$$Z_t = 0.1724\varepsilon_{(t-1)} + \frac{(-0.1315\varepsilon_{(t)})}{(1 - 0.8868 * m_{(t-1)})} p_t^T + 0.1177(I108) - 0.0743(I125) - 0.0671(I131) - 0.0730(I141) + a_t$$

Ecuación 11. ARIMA(0,1,1) + intervención ARIMA(1,1,0)+atípicos.

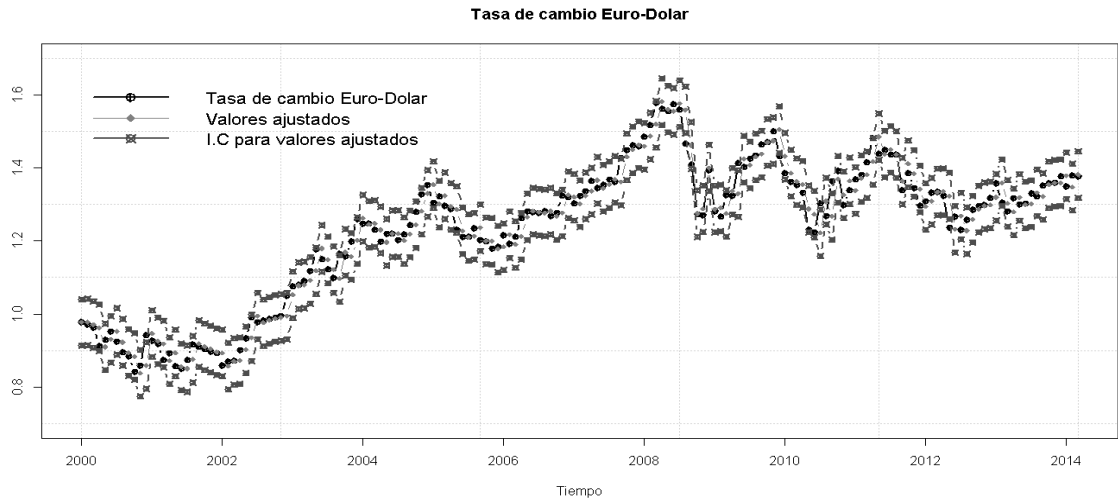
Donde  $Z_t$  es la tasa de cambio Euro/Dólar en el periodo t diferenciada un periodo,  $m_{(t-1)}$  es el valor del proceso autorregresivo causado por la intervención en el periodo anterior,  $p_t^T$  es la función de paso o pulso, I108 es el valor de la tasa de cambio Euro/Dólar en diciembre de 2008, I125 es el valor de la tasa de cambio Euro/Dólar en mayo de 2010, I131 es el valor de la tasa de cambio Euro/Dólar en noviembre de 2010, I141 es el valor de la tasa de cambio Euro/Dólar en septiembre de 2011,  $\varepsilon_{(t-1)}$  es el error de estimación en el periodo t-1 y  $a_t$  es el error de estimación del periodo, que debe tener como característica ser de ruido blanco.

El modelo indica que el valor de la tasa de cambio del Euro en términos de Dólares de un mes determinado está en función del valor de la tasa de cambio Euro/Dólar en los meses o mes anterior y de los errores de estimación, teniendo en cuenta una intervención en julio de 2008 y observaciones atípicas en diciembre de 2008, mayo de 2010, noviembre de 2010 y septiembre de 2011.

Específicamente el modelo señala que antes de la intervención o de valores atípicos el proceso sigue un comportamiento que podría modelarse mediante medias móviles. En la figura 10 se presentan gráficamente los valores ajustados y el valor original de la serie, se puede apreciar la bondad del ajuste del modelo.



Figura 10. Tasa de cambio Euro Dólar y valores ajustados.



#### 4.3.2. Obtención de los flujos de caja del modelo ARIMAX.

En la figura 12 se aprecian los flujos de caja obtenidos mediante el siguiente procedimiento:

- Se calculó la tasa de cambio esperada para el periodo  $t$  aplicando el modelo  $ARIMA(0,1,1)$  + intervención  $ARIMA(1,1,0)$ +atípicos.
- Se toma la decisión de comprar o vender atendiendo al siguiente criterio: si el valor de la tasa de cambio en el periodo  $t-1$  es menor al valor de tasa de cambio esperado en  $t$  entonces el inversionista teórico procedió a comprar Euros, de lo contrario los vendió.
- Se calculan los resultados de las operativas de compra o venta para dos periodos,  $t-1$  y  $t$ . En caso de que se haya cumplido el pronóstico del modelo hay utilidades para el inversionista, de lo contrario hay pérdidas.

#### 4.4. Valor presente neto.

Una vez obtenidos los flujos de caja a partir de la aplicación de los modelos se procedió a calcular el valor presente neto arrojado por cada uno de ellos para compararlos y llegar a determinar el de mejores retornos.

Se tomó la fórmula,  $\epsilon(VPN_{(i)}) = \sum \epsilon(F_j) \left(\frac{1}{(1+i)}\right)^j = \mu VPN_{(i)}$

Lo anterior dado que los flujos de caja no están autorrelacionados, tal como lo muestran el autocorrelograma parcial de los flujos de caja resultantes del modelo de paridad de poder adquisitivo (ver la figura 13) y del modelo ARIMAX (figura 14).

Figura 11. Flujos de caja obtenidos por la aplicación del modelo PPA para el periodo t.

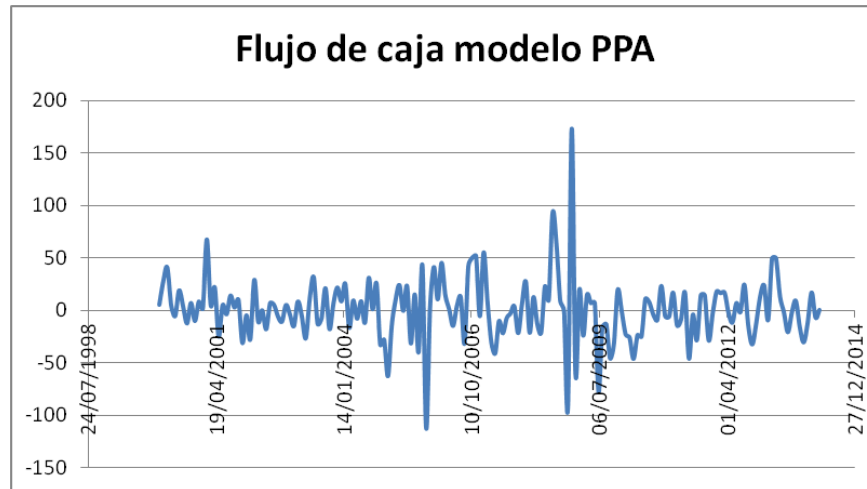
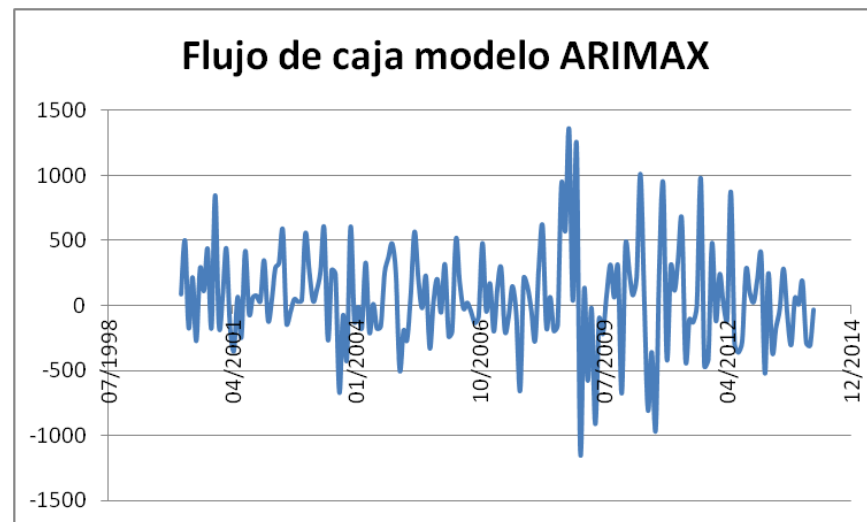


Figura 12. Flujos de caja obtenidos por la aplicación del modelo ARIMA(0,1,1) + intervención ARIMA(1,1,0)+atípicos para el periodo t.



Los valores presentes netos calculados para cada modelo se relacionan a continuación:

$$\begin{aligned}(VPN_{(i)} PPA) &= \$104.59 \\(VPN_{(i)} ARIMAX) &= \$3,968.35\end{aligned}$$

Donde  $\epsilon(VPN_{(t)} PPA)$  es el valor presente neto expresado en dólares, obtenido al invertir 10.000 dólares aplicando el modelo de la paridad de poder adquisitivo;  $\epsilon(VPN_{(t)} ARIMAX)$  es el valor presente neto expresado en dólares, obtenido al invertir 10.000 dólares aplicando el modelo ARIMA(0,1,1) + intervención ARIMA(1,1,0) + atípicos. La tasa de descuento o tasa de oportunidad aplicada es del 7% efectivo anual, que se supone tasa promedio de retorno real durante el periodo evaluado para una inversión sin riesgo en Colombia (por ejemplo abrir CDT o invertir en TES). En el anexo 3 se presenta un cuadro con los resultados para cada periodo.

Ahora bien, los flujos obtenidos aplicando los modelos se desprendieron de ir liquidando al corte de cada mes al valor de cierre de la paridad euro – dólar sobre la base de la decisión de comprar o vender según lo explicado en párrafos anteriores, motivo por el cual no se usaron intervalos de confianza para pronosticar el valor de la paridad ni para calcular intervalos de confianza del valor presente neto esperado.

Figura 13. Autocorrelograma parcial de los flujos de caja obtenidos mediante la aplicación del modelo de paridad de poder adquisitivo.

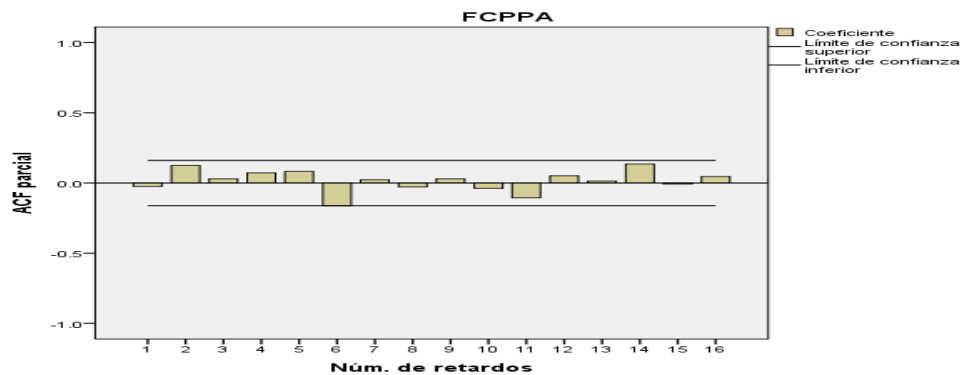
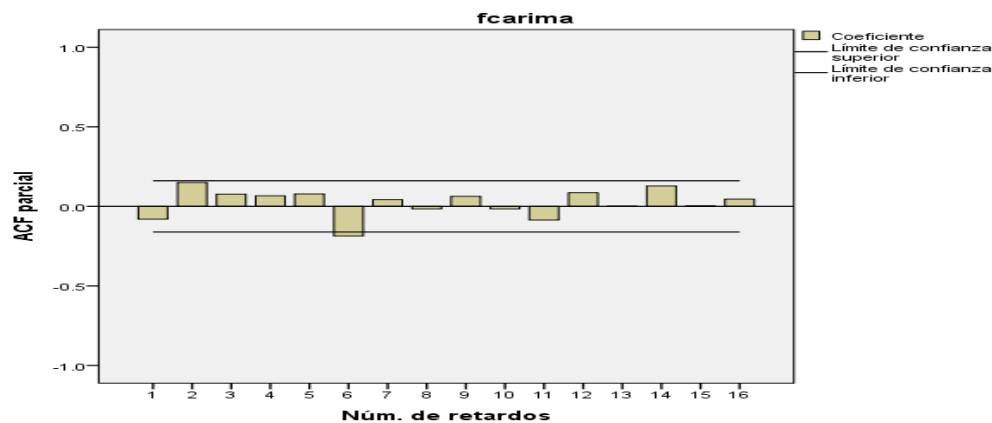


Figura 14. Autocorrelograma parcial de los flujos de caja obtenidos mediante la aplicación del modelo ARIMA(0,1,1) + intervención ARIMA(1,1,0)+atípicos para el periodo t.



## 5. DISCUSIÓN.

El Dr. Gujarati (2010) menciona en su libro de econometría que,

*Una razón de la popularidad del proceso de construcción de modelos ARIMA es su éxito en el pronóstico. En muchos casos, los pronósticos obtenidos por este método son más confiables que los obtenidos de modelos econométricos tradicionales, en particular en el caso de pronósticos de corto plazo. Por supuesto, cada caso debe verificarse.*

En este trabajo se llegó a una conclusión similar ya que el modelo ARIMAX ajustado indica que es posible para un agente económico obtener ganancias realizando un seguimiento de la evolución de la tasa de cambio Euro/Dólar sin atender a otras variables.

Un aspecto importante a tener en cuenta es el hecho de que en este trabajo no se ajustó ningún modelo para predecir la inflación y aplicar los resultados al modelo de la paridad de poder adquisitivo, lo que quizá podría redundar en mejores resultados. Se sugiere la posibilidad de avanzar en este sentido para incorporar posibles efectos rezagados en los cambios de los precios sobre la paridad de compra de los países, lo que daría mayor poder predictivo a la teoría del precio único.

La literatura relativa a la aplicación de modelos ARIMA con cambio estructural es relativamente abundante y puede dar pistas al investigador para detectar puntos de mejora en la aplicación de los modelos econométricos como el de PPA; para un repaso del estado del arte a este respecto véase el interesante artículo cambios estructurales en series de tiempo: una revisión del estado del arte de Paola Andrea Sánchez (2008), donde se recogen avances en este campo desde 1989 hasta el 2005.

## 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En términos generales se encontró que los retornos, evaluados mediante la técnica del valor presente neto, son mayores cuando se usa el modelo ARIMAX que cuando se utiliza el de paridad de poder adquisitivo. Lo cual indica que el primer modelo le otorga mejores posibilidades de acierto a un trader en la toma de las decisiones de compra o venta mientras que si usa únicamente información de la inflación (sin modelamiento ARIMA) sus retornos pueden ser menores.

En vista de que el alcance del presente trabajo está limitado en cuanto al análisis de las series de tiempo se recomienda seguir la investigación en aras de determinar si eventualmente mediante la aplicación de un aparato estadístico más sofisticado podrían lograrse modelos de series de tiempo mejor ajustados cuyos resultados mejoren los retornos.

De otra parte debe tenerse en cuenta que el modelo de paridad de poder adquisitivo puede ser mejorado (en su versión empleada en este trabajo) si se le aplica el análisis de series de tiempo lo que podría redundar en mejores predicciones, motivo por el cual también se recomienda continuar investigando sobre el impacto que un modelo econométrico mejorado pueda tener en los portafolios.

## 7. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

INTERNET: Forex Market Size: A trader Advantage. <http://finance.yahoo.com>

INTERNET:[http://www.amf-france.org/Actualites/Communiqués-de-presse/AMF/annee\\_2014.html?docId=workspace%3A%2F%2FSpacesStore%2F96c52a14-3900-464f-8fff-7d4700ff37e3](http://www.amf-france.org/Actualites/Communiqués-de-presse/AMF/annee_2014.html?docId=workspace%3A%2F%2FSpacesStore%2F96c52a14-3900-464f-8fff-7d4700ff37e3). L'Autorité des marchés financiers se mobilise contre les dangers du Forex pour les particuliers. Publié le 13 octobre 2014.

PÉREZ RAMÍREZ, Fredy O. MODELOS ARIMA –ARCH, ALGUNAS APLICACIONES A LAS SERIES DE TIEMPO FINANCIERAS. Pág. 14. Sello Editorial Universidad de Medellín. 2.008.

DORNBUSCH, Rudiger y FISCHER, Stanley. MACROECONOMÍA, SEXTA EDICIÓN. Pág. 711. MC GRAW HILL. 1.994.

CASSEL, Gustav. THE PRESENT SITUATION IN THE FOREIGN EXCHANGES. Economic Journal 1916. Páginas 62 – 65.

KRUGMAN, Paul R. y OBSTFELD, Maurice. ECONOMÍA INTERNACIONAL. TEORÍA Y POLÍTICA. Ed. Pearson. Séptima edición. Capítulo 15.

HOLMES, MARK J. (2001). "New Evidence on Real Exchange Rate Stationary and Purchasing Power Parity in Less Developed Countries", Journal of Macroeconomics, Vol. 23, No. 4, pp. 601-14.

ANORUO, EMMANUEL, HABTU Braha, y YUSUF Ahmad. (2002). "Purchasing Power Parity: Evidence from Developing Countries", International Advances in Economic Research, Vol. 8, No. 2, pp. 85-96.

DARBY, Michael R. (1983). "Movements in Purchasing Power Parity: The Short and Long Runs", en M. R. Darby y J. R. Lothian, The International Transmission of Inflation. Chicago U. Press.

HUIZINGA, John. (1987). "An Empirical Investigation of the Long-run Behavior of Real Exchange Rates", Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, Autumn, pp. 149-215.

FRENKEL, Jacob A. (1981). "The Collapse of Purchasing Power Parities During the 1970's", European Economic Review, Vol. 16, No. 1, pp. 145-65.

TAYLOR, Alan M. (1992). "External Dependence, Demographic Burdens, and Argentine Economic Decline After the Belle Époque", Journal of Economic History, Vol. 52, No. 4, Diciembre, pp. 907-36.

MARK, Nelson. (1990). "Real and Nominal Exchange Rates in the Long Run: An Empirical Investigation", *Journal of International Economics*, Vol. 28, No. 1-2, Febrero, pp. 115-36.

KIM, Yoonbai. (1990). "Purchasing Power Parity in the Long Run: A Cointegration Approach", *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 22, No. 4, pp. 491-503.

CHEUNG, Yin-Wong, y KON S. Lai. (1993). "A Fractional Cointegration Analysis of Purchasing Power Parity", *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 11, No. 1, pp. 103-12.

KANAS, Angelos. (2006). "Purchasing Power Parity and Markov Regime Switching", *Journal of Money, Credit, and Banking*, Vol. 38, No. 6, Septiembre, pp. 1669-87.

OBSTFELD, Maurice, y KENNETH S. Rogoff (1995), "Exchange Rate Dynamics Redux", *Journal of Political Economy*, Vol. 103, No. 3, pp. 624-660.

BOX E. P., George and JENKINS M., Gwilym. *TIME SERIES ANALYSIS, forecasting and control*. Ed. Holden – Day, 1976.

CRYER D., Jonathan and CHAN, Kung-Sik. *TIME SERIES ANALYSIS, With applications in R*. Second edition. Springer Texts in Statistics, 2008. Pages 249 – 273.

BROCKWELL J., Peter and DAVIS A., Richard. *INTRODUCTION TO TIME SERIES AND FORECASTING*. Springer Texts in Statistics, 2002.

INFANTE VILLARREAL, Arturo. *EVALUACIÓN FINANCIERA DE PROYECTOS DE INVERSIÓN*. Editorial norma, 1987. Páginas 263 – 296.

GUJARATI, Damodar N. y PORTER Dawn C. *ECONOMETRÍA* quinta edición. Editorial McGRAW-HILL, 2010. Páginas 754 – 760.

Castaño, E. *Análisis de series de tiempo lineales, partes 1 y 2*. Notas de clase, 2011.

MONTENEGRO, Alvaro. *Análisis de Series de Tiempo*. Pontificia Universidad Javeriana. Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas, Bogotá, D. C. 2010. Páginas 242 – 247.

SÁNCHEZ, Paola Andrea. *Cambios estructurales en series de tiempo: una revisión del estado del arte*. Revista Ingenierías, Universidad de Medellín, volumen 7, No. 12, páginas 115-140. Enero – junio de 2008.

## 8. ANEXOS.

### Anexo 1. Pruebas de normalidad de los residuos del modelo ajustado.

Se realizaron las siguientes pruebas de normalidad: Shapiro-Wilk, Jarque - Bera, Kolmogorov-Smirnov para una muestra y D'Agostino, las cuales indican que los residuos se distribuyen normalmente:

Recursive CUSUM test (estabilidad estructural a través de sumas acumuladas)

data: fluc\_emp2  
S = 0.5821, p-value = 0.4486

```
#####  
##### Pruebas de incorrelación #####  
#####
```

Box-Ljung test  
data: residuales  
X-squared = 5.0704, df = 11, p-value = 0.9277

Durbin-Watson test  
data: residuales ~ 1  
DW = 2.001, p-value = 0.5026

```
#####  
##### Pruebas de normalidad #####  
#####
```

### Shapiro-Wilk normality test

data: residuales  
W = 0.9929, p-value = 0.5697

### Jarque - Bera Normalality Test

Test Results:

STATISTIC:

X-squared: 1.4292

P VALUE:

Asymptotic p Value: 0.4894



## One-sample Kolmogorov-Smirnov test

### Test Results:

#### STATISTIC:

D: 0.0529

#### P VALUE:

Alternative Two-Sided: 0.7251

Alternative Less: 0.3841

Alternative Greater: 0.7913

## D'Agostino Normality Test

### Test Results:

#### STATISTIC:

Chi2 | Omnibus: 1.7877

Z3 | Skewness: 0.5597

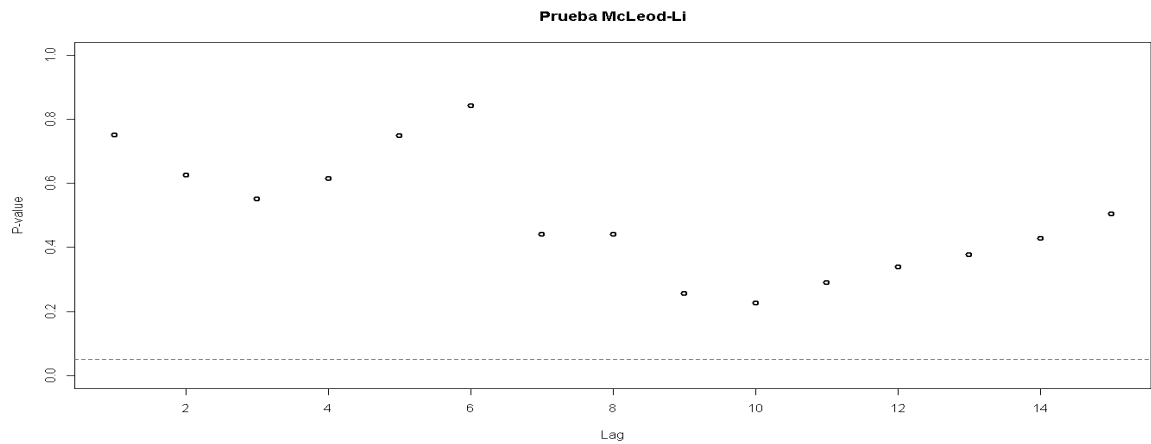
Z4 | Kurtosis: 1.2143

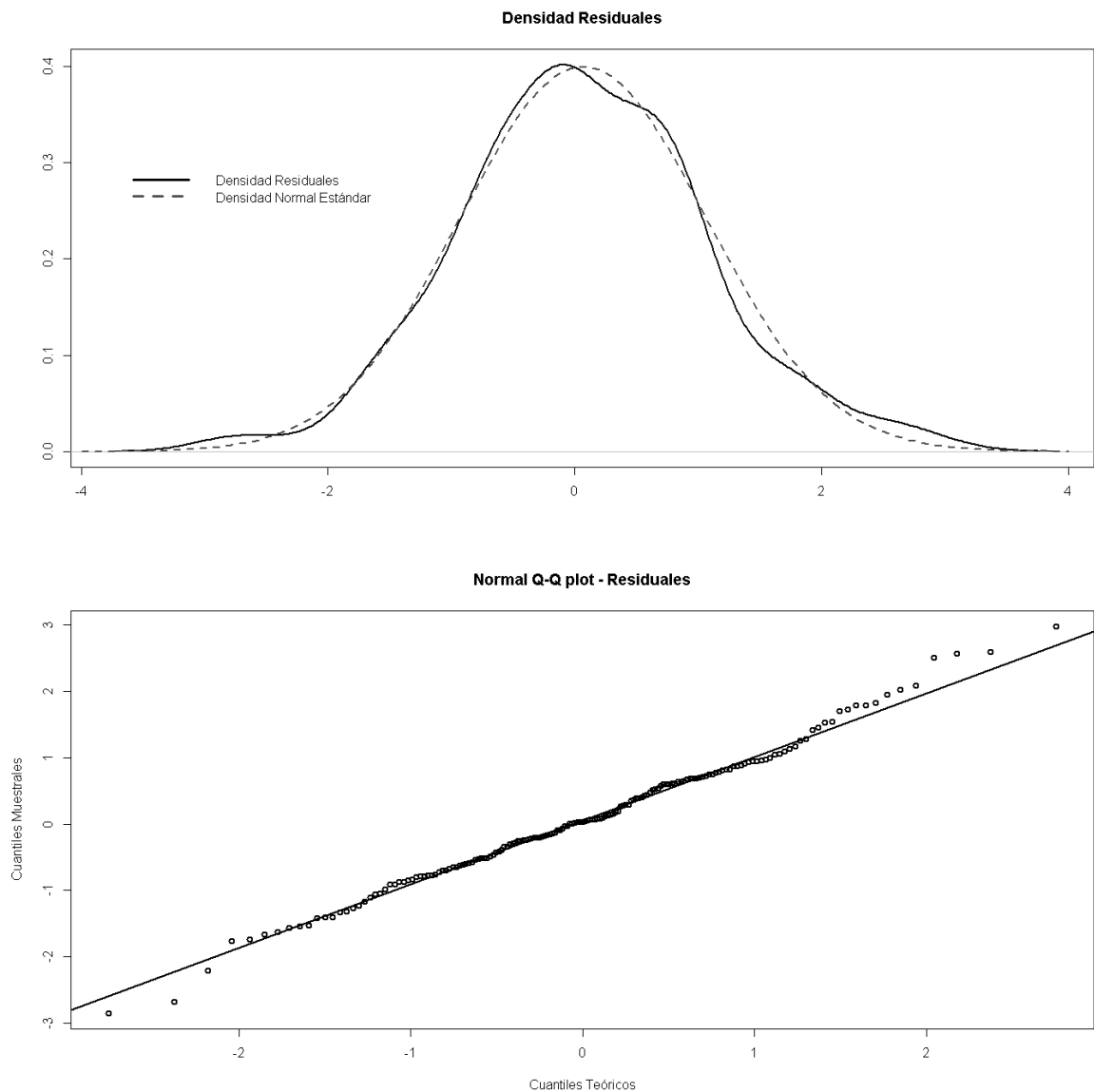
#### P VALUE:

Omnibus Test: 0.4091

Skewness Test: 0.5757

Kurtosis Test: 0.2246





## Anexo 2. Pruebas de raíz unitaria.

```
#####
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
#####
```

Test regression drift

```
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1)
```

```

Residuals:
      Min              1Q          Median              3Q      Max
-0.133432    -0.018891    -0.000668     0.023590     0.122388

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   0.03280    0.01953   1.680   0.0948
z.lag.1       -0.02469    0.01565  -1.578   0.1165
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.03834 on 168 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.0146,    Adjusted R-squared:  0.008732
F-statistic: 2.489 on 1 and 168 DF,  p-value: 0.1165

Value of test-statistic is:      -1.5776      1.5635

Critical values for test statistics:
              1pct      5pct 10pct
tau2 -3.46 -2.88      -2.57
phi1      6.52      4.63      3.81

#####
# Phillips-Perron Unit Root Test #
#####
Test regression with intercept

Residuals:
      Min              1Q          Median              3Q      Max
-0.133432    -0.018891    -0.000668     0.023590     0.122388

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   0.03280    0.01953   1.68   0.0948 .
y.l1          0.97531    0.01565  62.31  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 0.03834 on 168 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9585,    Adjusted R-squared:  0.9583

```

F-statistic: 3883 on 1 and 168 DF, p-value: < 2.2e-16

Value of test-statistic, type: Z-tau is: -1.4624

aux. Z statistics

Z-tau-mu 1.5809

Critical values for Z statistics:

	1pct	5pct
10pct		
critical values	-3.4698	-2.878495 -2.575714

#####  
# Zivot-Andrews Unit Root Test #  
#####

Residuals:

	Min	1Q	Median
3Q	Max		
	-0.113883	-0.019102 -0.001063 0.020128	0.121658

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	0.1704909	0.0377137	4.521	1.20e-05 ***
y.l1	0.7906622	0.0457786	17.271	< 2e-16 ***
trend	0.0014325	0.0003205	4.469	1.49e-05 ***
y.dl1	0.0558545	0.0771244	0.724	0.47000
y.dl2	0.0191055	0.0763076	0.250	0.80262
y.dl3	0.1792710	0.0762397	2.351	0.01993 *
du	-0.0368206	0.0122826	-2.998	0.00316
**				
dt	-0.0014378	0.0004454	-3.228	0.00151
**				

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.03629 on 159 degrees of freedom  
(4 observations deleted due to missingness)

Multiple R-squared: 0.9633, Adjusted R-squared: 0.9617  
F-statistic: 595.9 on 7 and 159 DF, p-value: < 2.2e-16  
Teststatistic: -4.5728  
Critical values: 0.01= -5.57 0.05= -5.08 0.1=  
-4.82

Potential break point at position: 103

Anexo 3. Flujos de caja y valores presentes netos obtenidos a partir de los modelos PAA y ARIMA(0,1,1) (0,0,0) + intervención ARIMA(1,1,0)+atípicos para el periodo t, aplicados sobre la paridad Euro – Dólar entre enero de 2.000 y marzo de 2.014.

Mes_año	Flujo caja PPA	Flujo caja ARIMAX	Mes_año	Flujo caja PPA	Flujo caja ARIMAX
01/2000			07/2003	7.94	241
02/2000	5.08	87	08/2003	20.77	-666
03/2000	27.19	499	09/2003	18.02	-74
04/2000	40.71	-171	10/2003	6.18	-409
05/2000	4.75	216	11/2003	21.54	604
06/2000	5.67	-271	12/2003	8.39	-120
07/2000	18.74	285	01/2004	25.06	-10
08/2000	3.79	114	02/2004	16.84	-170
09/2000	12.63	435	03/2004	9.11	329
10/2000	6.72	-171	04/2004	8.13	-206
11/2000	10.34	846	05/2004	8.51	12
12/2000	8.15	-156	06/2004	11.95	-176
01/2001	1.70	87	07/2004	30.75	-159
02/2001	67.29	437	08/2004	0.84	252
03/2001	4.77	-175	09/2004	25.47	367
04/2001	21.60	-348	10/2004	32.96	477
05/2001	24.98	67	11/2004	28.04	253
06/2001	4.71	-242	12/2004	62.95	-495
07/2001	3.91	419	01/2005	15.02	-191
08/2001	13.91	-61	02/2005	9.65	-265
09/2001	2.47	61	03/2005	23.81	94
10/2001	9.74	76	04/2005	0.65	567
11/2001	31.29	34	05/2005	22.78	197
12/2001	5.02	346	06/2005	31.74	-18
01/2002	27.78	-110	07/2005	14.89	223
02/2002	28.77	20	08/2005	40.26	-327
03/2002	10.87	287	09/2005	42.48	29
04/2002	0.26	327	10/2005	112.76	203
05/2002	18.19	578	11/2005	2.76	-52
06/2002	6.53	-137	12/2005	41.03	318
07/2002	4.86	-51	01/2006	10.30	-236
08/2002	6.16	48	02/2006	44.99	-197

Mes_año	Flujo caja PPA	Flujo caja ARIMAX	Mes_año	Flujo caja PPA	Flujo caja ARIMAX
					512
09/2002	10.90	30	03/2006	14.19	
10/2002	4.84	41	04/2006	0.61	180
11/2002	4.16	556	05/2006	15.03	-23
12/2002	15.31	264	06/2006	3.46	22
01/2003	8.08	35	07/2006	12.41	-48
02/2003	5.49	115	08/2006	31.79	-134
03/2003	26.89	258	09/2006	42.03	-84
04/2003	10.48	595	10/2006	49.84	479
05/2003	31.50	-263	11/2006	51.57	-40
06/2003	12.82	274	12/2006	5.69	170
07/2003	7.94	241	01/2007	54.93	-197
02/2007	8.08	129	09/2010	4.31	283.6
03/2007	30.83	289	10/2010	9.27	-935.9
04/2007	41.28	-195	11/2010	22.97	-409.5
05/2007	10.65	-82	12/2010	5.71	300
06/2007	22.06	148	01/2011	6.16	116.7
07/2007	7.72	-60	02/2011	16.57	349
08/2007	3.15	-654	03/2011	14.36	656.8
09/2007	3.54	211	04/2011	9.06	-418.2
10/2007	21.85	142	05/2011	16.59	-105.4
11/2007	5.36	-35	06/2011	46.22	-128.8
12/2007	27.07	-265.5	07/2011	4.35	3.4
01/2008	21.46	320.5	08/2011	28.61	975.9
02/2008	12.34	607.3	09/2011	14.08	-463.8
03/2008	12.90	-165.5	10/2011	14.06	-411.6
04/2008	21.47	65.1	11/2011	28.97	478.6
05/2008	22.65	-195.9	12/2011	3.36	-115.8
06/2008	10.11	-149.9	01/2012	17.64	241
07/2008	92.48	-933.9	02/2012	16.22	22.1
08/2008	63.04	575.6	03/2012	16.79	-107.2
09/2008	8.51	1354.3	04/2012	2.67	873.3
10/2008	0.99	39	05/2012	11.78	-298.2
11/2008	92.75	-1238.3	06/2012	6.68	-359.6
12/2008	172.87	-1133.9	07/2012	1.90	-274.7
01/2009	60.78	128.7	08/2012	24.24	278
02/2009	19.72	-575	09/2012	14.97	102

Mes_año	Flujo caja PPA	Flujo caja ARIMAX	Mes_año	Flujo caja PPA	Flujo caja ARIMAX
03/2009	- 24.21	-20.9	10/2012	- 32.66	27.6
04/2009	14.58	-907.4	11/2012	- 12.70	198.3
05/2009	6.75	-103.5	12/2012	13.12	392.6
06/2009	7.07	-217.6	01/2013	23.47	-520.1
07/2009	- 78.04	82.3	02/2013	- 9.37	247.6
08/2009	- 16.82	314.5	03/2013	49.23	-357.8
09/2009	- 13.19	64.2	04/2013	49.58	-170
10/2009	- 46.00	292.5	05/2013	13.17	-21.1
11/2009	- 32.81	-673.1	06/2013	- 2.08	283.6
12/2009	19.06	467.8	07/2013	- 21.09	-77.6
01/2010	- 1.00	248.8	08/2013	- 2.53	-300.7
02/2010	- 23.02	80.3	09/2013	8.86	58.6
03/2010	- 26.14	219.3	10/2013	- 15.83	9.1
04/2010	- 46.43	1009.7	11/2013	- 30.70	185.5
05/2010	- 23.84	70	12/2013	- 12.10	-285.9
06/2010	- 25.11	-800.7	01/2014	16.81	-307.4
07/2010	10.52	-357.7	02/2014	- 7.02	-30.9
08/2010	7.30	-955.7	03/2014	0.14	
VPN			\$	104.59	\$ 3,968.35